



## Désynchronisation partielle de la méthode APhR

Vivien Courtier, David Ryckelynck, Andrei Constantinescu

### ► To cite this version:

Vivien Courtier, David Ryckelynck, Andrei Constantinescu. Désynchronisation partielle de la méthode APhR. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. 8 p. ; Clé USB. hal-00592880

**HAL Id: hal-00592880**

**<https://hal.science/hal-00592880>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Désynchronisation partielle de la méthode APHR

V. Courtier<sup>1</sup>, D. Ryckelynck<sup>2</sup>, A. Constantinescu<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LMS, Ecole Polytechnique, France, [courtier@lms.polytechnique.fr](mailto:courtier@lms.polytechnique.fr)

<sup>2</sup> CdM, Ecole des Mines de Paris, France, [david.ryckelynck@ensmp.fr](mailto:david.ryckelynck@ensmp.fr)

<sup>3</sup> LMS, Ecole Polytechnique, France, [andrei.constantinescu@lms.polytechnique.fr](mailto:andrei.constantinescu@lms.polytechnique.fr)

**Résumé** — Ce papier traite de la désynchronisation des variables internes dans la résolution de problèmes élasto-plastiques en utilisant la méthode APHR (A Priori Hyper Reduction). Cette méthode a priori ne nécessite en amont aucune prévision éléments finis (EF) et permet la construction d'un modèle d'ordre réduit (ROM). Dans la continuité des travaux menés [4], la formulation multi-niveaux est utilisée de façon désynchronisée sur une plaque avec inclusions. Les résultats seront critiqués en termes de précision et d'efficacité numérique.

**Mots clefs** — réduction de modèle, méthode APHR, méthode POD, décomposition de domaine.

## 1 La méthode APHR multi-niveaux

Dans un contexte industriel concurrentiel, la conception de pièces mécaniques nécessite de nombreux calculs. Certains peuvent s'avérer rapides mais d'autres doivent fournir des résultats précis. La méthode APHR offre de tels choix de calculs en choisissant de privilégier graduellement la précision ou le temps de calcul.

La méthode APHR est une méthode de réduction incrémentale et adaptative. Elle fournit des prévisions issues d'un modèle d'ordre réduit (ROM) éventuellement corrigées par des calculs partiels éléments finis (EF) utilisés pour enrichir les bases réduites associées au ROM d'un mode empirique. Afin de contrôler la croissance du ROM, une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) menée sur les bases réduites sélectionne les modes empiriques les plus représentatifs. Concernant l'hyper-réduction, les lois de comportement sont intégrées sur un domaine d'intégration réduite (RID).

### 1.1 Définition des espaces de fonctions

On s'intéresse à un domaine  $\Omega$  pendant un intervalle de temps  $]0, T]$ . La frontière de  $\Omega$  est notée  $\partial\Omega = \partial_{|U}\Omega \cup \partial_{|F}\Omega$ . Sur  $\partial_{|U}\Omega$ , on a une condition de Dirichlet  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \forall t \in ]0, T]$  et sur  $\partial_{|F}\Omega$ , on a une force  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  dépendant du temps.

Le modèle EF est déduit du modèle continu en utilisant un sous espace  $V_h$  de  $V$  et le ROM en est déduit en utilisant un sous espace  $V_{ROM}^{(n)}$  de  $V_h$  selon (1), (2) et (3) [4].

$$V = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u}|_{\partial_{|U}\Omega} = 0 \right\} \quad (1)$$

$$V_h = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in V \mid \exists \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^h, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^h N_j(\mathbf{x}) q_j(t) \forall \mathbf{x} \in \Omega \right\} \quad (2)$$

$$V_{ROM}^{(n)} = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in V_h \mid \exists \mathbf{a}^{(n)} \in \mathfrak{R}^s, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^s \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) a_k^{(n)}(t) \forall \mathbf{x} \in \Omega \right\} \quad (3)$$

Comme les bases réduites peuvent évoluer en raison des éventuelles POD, l'exposant  $(n)$  donne la version du ROM.

La résolution de l'état mécanique à l'instant  $t$  doit satisfaire au principe des travaux virtuels (PTV) donné par (4).

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}^*) : \sigma(\varepsilon(\mathbf{u}_{\text{ROM}}^{(n)}(\mathbf{x}, \tau)), \tau < t) d\Omega - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_{\text{ROM}}^{(n)} \quad (4)$$

Dans le cas du ROM, le PTV fait intervenir uniquement  $s$  équations scalaires au lieu de  $h$  dans le cas d'un modèle EF. L'hyper-réduction consiste alors à introduire de nouveaux espaces de fonctions tronquées  $V_{\Pi h}$  et  $V_{\Pi \text{ROM}}^{(n)}$  selon (5) et (6) afin d'appliquer le PTV.

$$V_{\Pi h} = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in V \mid \exists \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^h, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^h N_j(\mathbf{x}) q_j(t) \forall \mathbf{x} \in \Omega \right\} \quad (5)$$

$$V_{\Pi \text{ROM}}^{(n)} = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in V_h \mid \exists \mathbf{a}^{(n)} \in \mathfrak{R}^s, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^s \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) a_k^{(n)}(t) \forall \mathbf{x} \in \Omega \right\} \quad (6)$$

Ces fonctions tronquées sont les fonctions de  $V_h$  et  $V_{\text{ROM}}^{(n)}$  annulées en dehors d'un domaine  $\Omega_{\Pi}$  appelé RID créée à l'aide d'une fonction bulle régulière  $b(\mathbf{x})$  de support  $\Omega_{\Pi}$  donnée par (7).

$$b(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_{\Pi} \setminus (\partial \Omega_{\Pi} \cap \overline{\Omega_{\Pi}}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7)$$

Dans ce cas, le domaine  $\Omega_{\Pi}$  fait intervenir au moins  $s$  équations dans la résolution et on obtient une formulation du PTV restreinte à  $\Omega_{\Pi}$  selon (8) avec  $\partial_{|F} \Omega_{\Pi} = \partial_{|F} \Omega \cap \Omega_{\Pi}$ .

$$\int_{\Omega_{\Pi}} \varepsilon(\mathbf{u}^*) : \sigma(\varepsilon(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)), \tau < t) d\Omega - \int_{\partial_{|F} \Omega_{\Pi}} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_{\Pi \text{ROM}}^{(n)} \quad (8)$$

## 1.2 Désynchronisation des variables internes

La désynchronisation adoptée porte sur la représentation des variables internes uniquement. La représentation des déplacements reste inchangée. Le domaine  $\Omega$  est alors écrit comme une partition  $(\Omega_i)_{i \in \{1, \dots, \varphi\}}$ . A chaque région  $\Omega_i$  de l'espace  $\Omega$ , une base de modes empiriques relatifs aux variables internes est associée [2][3].

A un instant  $t$  donné, les variables d'état (9) et les variables internes (10) sont décrites comme des combinaisons linéaires des variables d'état réduites et des variables internes réduites.

$$\mathbf{u}_{\text{ROM}}^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^s \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) a_k^{(n)}(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (9)$$

$$\mathbf{z}_{\text{ROM}}^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{\zeta_i} \gamma_k^{(n)}(\mathbf{x}) b_k^{(n)}(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \quad \forall i \in \{1, \dots, \varphi\} \quad (10)$$

La liste  $(\psi_k^{(n)}(\mathbf{x}))_{k \in \{1, \dots, s\}}$  définit les modes empiriques de la base relative au déplacement sur  $\Omega$ . La liste  $(\gamma_k^{(n)}(\mathbf{x}))_{k \in \{1, \dots, \zeta_i\}}$  définit les modes empiriques de la base relative aux variables internes sur  $\Omega_i$ .

## 1.3 La construction du RID

L'idée de l'hyper-réduction est d'utiliser seulement une partie des équations d'équilibre du modèle EF afin de satisfaire l'équilibre du domaine  $\Omega$ .

Pour tenir compte de la désynchronisation de la représentation des variables internes et permettre l'extrapolation des variables internes sur  $\bar{\Omega}_\Pi$ , le RID doit être construit par agglomération en prenant en compte la partition  $(\Omega_i)_{i \in \{1, \dots, \varphi\}}$ . Toutefois, afin que le RID puisse être construit de façon identique pour un calcul synchronisé ou désynchronisé, on introduit une nouvelle partition  $(\Omega_i)_{i \in \{1, \dots, \mu\}}$  du domaine  $\Omega$  et le RID est construit par agglomération à partir de la partition  $(\Omega_k)_{k \in \{1, \dots, \kappa\}}$  avec  $\kappa \leq \varphi * \mu$  qui résulte de l'intersection des partitions  $(\Omega_i)_{i \in \{1, \dots, \varphi\}}$  et  $(\Omega_i)_{i \in \{1, \dots, \mu\}}$ .

Le domaine  $\Omega$  est alors scindé en une partition  $\Omega_\Pi \cup \bar{\Omega}_\Pi$  où  $\Omega_\Pi$  comprend une région  $\Omega_F$  contenant des éléments sur lesquels s'appliquent les efforts et éventuellement augmenté d'une région d'intérêt  $\Omega_I$  selon (11).

$$\Omega_\Pi = \bigcup_{i=1}^{\kappa} \Omega_{\Pi i} \cup \Omega_F \cup \Omega_I \quad (11)$$

La liste de domaines  $(\Omega_{\Pi i})_{i \in \{1, \dots, \kappa\}}$  est construite par la méthode APHR en considérant des boules centrées sur les éléments qui maximisent le gradient des modes empiriques relatifs au champ de déplacement selon (12). Le paramètre  $n_{el}$  permet de choisir le nombre de boules pour chaque mode.

$$\Omega_{\Pi i} = \bigcup_{v=1}^{n_{el}} \bigcup_{k=1}^s B \left( \arg \max_{\Omega_i} \left\| \varepsilon(\psi_k^{(n)}) \right\|, h \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, \kappa\} \quad (12)$$

#### 1.4 L'algorithme incrémental

Les approximations multi-niveaux sont données selon (13) et (14) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{\text{ROM}}^{(n)}(\mathbf{x}, t) + \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (13)$$

$${}^i \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) = {}^i \mathbf{z}_{\text{ROM}}^{(n)}(\mathbf{x}, t) + \delta {}^i \mathbf{z}_h(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \quad \forall i \in \{1, \dots, \varphi\} \quad (14)$$

Selon une démarche incrémentale, l'état mécanique est supposé connu à un instant  $t_i$  et on recherche les inconnues à l'instant  $t_{i+1}$  [4].

*Etape 1* : les variables d'état réduites relatives au champ de déplacement  $\mathbf{a}^{(n)}(t_{i+1})$  sont prédites et les variables internes  ${}^i \mathbf{z}_{\text{ROM}}^{(n)}(\mathbf{x}, t_{i+1}) \quad \forall i \in \{1, \dots, \varphi\}$  sont calculées sur  $\Omega_\Pi$  selon (15).

$$\int_{\Omega_\Pi} \varepsilon(\mathbf{u}^*) : \sigma(\varepsilon(\mathbf{u}_{\text{ROM}}^{(n)}(\mathbf{x}, \tau)), \tau < t_{i+1}) d\Omega - \int_{\partial_F \Omega_\Pi} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t_{i+1}) d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_{\Pi \text{ROM}}^{(n)} \quad (15)$$

*Etape 2* : les variables internes  ${}^i \mathbf{z}_{\text{ROM}}^{(n)}(\mathbf{x}, t_{i+1}) \quad \forall i \in \{1, \dots, \varphi\}$  sont étendues au domaine  $\bar{\Omega}_\Pi$  en calculant les variables internes réduites  ${}^i \mathbf{b}^{(n)}(t_{i+1}) \quad \forall i \in \{1, \dots, \varphi\}$  selon (16) et (17).

$${}^i \mathbf{b}^{(n)}(t_{i+1}) = \arg \min_{{}^i \mathbf{b}^*} \left( \int_{\Omega_\Pi \cap \Omega_i} \left( {}^i \mathbf{z}_{\text{ROM}}^{(n)}(\mathbf{x}, t_{i+1}) - \sum_{k=1}^{\zeta_i} {}^i \gamma_k^{(n)}(\mathbf{x}) {}^i b_k^* \right)^2 d\Omega \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, \varphi\} \quad (16)$$

$${}^i \mathbf{z}_{\text{ROM}}^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\zeta_i} {}^i \gamma_k^{(n)}(\mathbf{x}) {}^i b_k^{(n)} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \cap \bar{\Omega}_\Pi \quad \forall i \in \{1, \dots, \varphi\} \quad (17)$$

*Etape 3* : un indicateur d'erreur  $\eta_{\text{ROM}}$  mesurant la précision de la prévision est évalué à l'aide du

résidu tronqué selon (18) avec  $\mathbf{u}^* \in V_{\Pi h}$ .

$$\eta_{ROM} = \left\| \int_{\Omega_{\Pi}} \varepsilon(\mathbf{u}^*) : \sigma(\varepsilon(\mathbf{u}_{ROM}^{(n)}(\mathbf{x}, \tau)), \tau < t_{i+1}) d\Omega - \int_{\partial_F \Omega_{\Pi}} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t_{i+1}) d\Gamma \right\| \quad (18)$$

*Etape 4* : si  $\eta_{ROM} \leq \varepsilon_R \|\mathbf{F}\|$ , alors la prévision du ROM est suffisamment précise et  $\delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t_{i+1}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$  et  $\delta^i \mathbf{z}_h(\mathbf{x}, t_{i+1}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \quad \forall i \in \{1, \dots, \varphi\}$ . Dans le cas contraire, une correction EF est menée selon (19).

$$\int_{\Omega_{\Pi}} \varepsilon(\mathbf{u}^*) : \sigma(\varepsilon(\mathbf{u}_{ROM}^{(n)}(\mathbf{x}, \tau) + \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, \tau)), \tau < t_{i+1}) d\Omega - \int_{\partial_F \Omega_{\Pi}} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t_{i+1}) d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_h \quad (19)$$

*Etape 5* : si  $\eta_{ROM} > \varepsilon_R \|\mathbf{F}\|$ , une correction EF a été menée et une actualisation de  $V_{ROM}^{(n)}$  est possible par enrichissement en utilisant  $\delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t_{i+1})$ . La première étape est de conserver le résidu de la projection orthogonale de  $\delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t_{i+1})$  sur  $V_{ROM}^{(n)}$  selon (20) et (21).

$$\delta_{\perp} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t_{i+1}) = \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t_{i+1}) - \sum_{k=1}^s \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) \delta a_k^{(n)}(t_{i+1}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (20)$$

$$\delta \mathbf{a}^{(n)}(t_{i+1}) = \arg \min_{\delta \mathbf{a}^*} \left( \int_{\Omega} \left( \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t_{i+1}) - \sum_{k=1}^s \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) \delta a_k^* \right)^2 d\Omega \right) \quad (21)$$

La base  $(\psi_k^{(n)})_{k \in \{1, \dots, s\}}$  relative au champ de déplacement associée au ROM peut alors être étendue en une base  $\left( \psi_k^{(n+\frac{1}{2})} \right)_{k \in \{1, \dots, s+1\}}$  selon (22) et (23).

$$\psi_k^{(n+\frac{1}{2})}(\mathbf{x}) = \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) \quad \forall k \in \{1, \dots, s\} \text{ et } \psi_{s+1}^{(n+\frac{1}{2})}(\mathbf{x}) = \frac{\delta_{\perp} \mathbf{u}_h}{\|\delta_{\perp} \mathbf{u}_h\|} \quad (22)$$

$$a_k^{(n+\frac{1}{2})}(t_{i+1}) = a_k^{(n)}(t_{i+1}) \quad \forall k \in \{1, \dots, s\} \text{ et } a_{s+1}^{(n+\frac{1}{2})}(t_{i+1}) = \|\delta_{\perp} \mathbf{u}_h\| \quad (23)$$

La seconde étape consiste à contrôler la croissance des bases réduites associées au ROM. Une POD est alors menée sur les inconnues d'état réduites relatives au champ de déplacement [5].

Le raisonnement est mené de la même façon sur les bases  $(\gamma_k^{(n)}(\mathbf{x}))_{k \in \{1, \dots, \zeta_i\}}$  relatives aux variables internes sur  $\Omega_i$ .

## 2 Les résultats numériques

### 2.1 Présentation du cas d'étude

Le cas d'étude est une plaque carrée  $\Omega$  de 100 mm de coté présentant trois inclusions (cf. Figure 1) dans une matrice sous à un chargement cyclique en traction-compression d'amplitude  $\sigma_l = 70$  MPa à contrainte moyenne nulle. Les trois rayons sont donnés par  $r_{01} = 5$  mm,  $r_{02} = 5$  mm et  $r_{03} = 8$  mm.

La plaque est maillée à l'aide de 6.113 éléments, possède 92.101 DDL, 264.753 variables internes dont 244.017 dans la matrice et 20.736 dans les inclusions.

La matrice  $\Omega_A$  est décrite par une loi de comportement élasto-plastique isotrope avec écrouissage

isotrope linéaire et les inclusions  $\Omega_B$  sont élastiques isotropes linéaires. Les paramètres matériaux sont ceux d'un alliage d'aluminium contenant des précipités [1]. Dans la matrice, on a  $E_A = 76.000 \text{ MPa}$ ,  $\nu_A = 0,33$ ,  $R_{0A} = 80 \text{ MPa}$  et  $h_A = 760 \text{ MPa}$ . Dans les inclusions, on a  $E_B = 1.610.000 \text{ MPa}$  et  $\nu_B = 0,33$ .

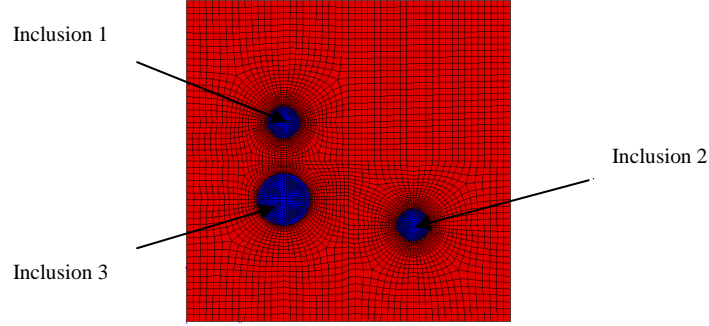


FIG. 1 – Plaque munie d'inclusions

Les simulations d'étude sont réalisées à l'aide du code ZeBuLon.

## 2.2 La stratégie de calcul

Le propos de cette étude est de montrer une amélioration de la qualité des résultats pour un gain de temps équivalent en désynchronisant par matériaux la représentation des variables internes.

Un calcul préliminaire S1 est mené sur la plaque en désynchronisant ou non les variables internes afin d'établir un ROM et un RID. On désigne par S1DHR la simulation 'S1 désynchronisée avec hyper-réduction' et par S1SHR la simulation 'S1 synchronisée avec hyper-réduction'.

En gardant la topologie du maillage, la géométrie est ensuite modifiée en augmentant le diamètre des inclusions. Le diamètre de la première inclusion est augmenté de 10%, celui de la deuxième inclusion n'est pas modifié et celui de la troisième inclusion est augmenté de 5%.

Un second calcul S2 est ensuite réalisé sur la géométrie modifiée en désynchronisant ou non les variables internes. Deux stratégies sont étudiées : une stratégie sans actualisation (aucune correction EF n'est calculée) et une stratégie avec actualisation (des corrections EF peuvent être calculées et utilisées pour enrichir les bases réduites). On désigne par S2DHR la simulation 'S2 désynchronisée avec hyper-réduction', S2SHR la simulation 'S2 synchronisée avec hyper-réduction', S2DNHR la simulation 'S2 désynchronisée sans hyper-réduction' et S2SNHR la simulation 'S2 synchronisée sans hyper-réduction'.

Les résultats obtenus sur les simulations sont comparés en termes de précision sur la déformation plastique cumulée ainsi qu'en termes d'efficacité numérique. Le paramètre d'erreur et le paramètre de gain choisis sont définis selon (24).

$$\varepsilon_{\Omega}(v) = \frac{\int_{\Omega} (v - v_{EF})^2 d\Omega}{\int_{\Omega} v_{EF}^2 d\Omega} \text{ et } \eta = \frac{t_{EF}}{t} \quad (24)$$

## 2.3 Résultats de la simulation S1

Le chargement pendant la simulation S1 correspond à une montée en charge suivie d'un cycle.

Le ROM de la simulation S1SHR contient 7 modes empiriques relatifs au champ de déplacement sur  $\Omega$  et 77 modes empiriques relatifs au champ de variables internes sur  $\Omega$ . Le ROM de la

simulation S1DHR contient 7 modes empiriques relatifs au champ de déplacement sur  $\Omega$ , 77 modes empiriques relatifs au champ de variables internes sur  $\Omega_A$  et 40 modes empiriques relatifs au champ de variables internes sur  $\Omega_B$ . Dans ce cas, le champ de déformation plastique cumulée est représenté avec des modes empiriques définis sur tout le domaine  $\Omega$  car les variables internes dans  $\Omega_B$  sont uniquement des déformations élastiques. Le nombre de modes empiriques relatifs aux variables internes dans les inclusions est bien inférieur à celui dans la matrice ce qui justifie une telle désynchronisation par matériaux.

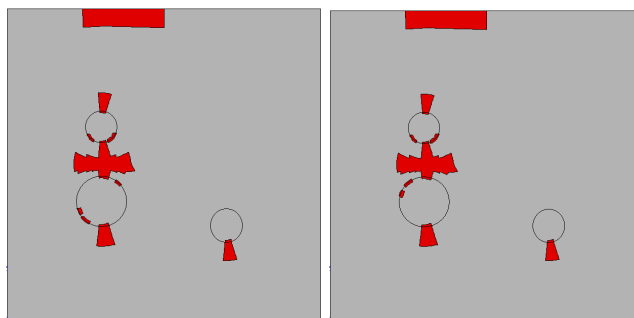


FIG. 2 – RID en fin de simulation S1, à gauche dans le cas S1DHR, à droite dans le cas S1SHR

Le RID de la simulation S1DHR contient 467 éléments et celui de la simulation S1SHR contient 461 éléments (cf. Figure 2). Lors des simulations S1DHR et S1SHR, le RID a été construit de façon identique pour avoir une taille de RID voisine car cette taille a une influence immédiate sur la précision des calculs. Ce procédé de construction permet donc de décorrélérer l'influence de la taille du RID de l'impact de la désynchronisation des variables internes.

La simulation S1 assure une excellente qualité et apporte un faible gain en temps de calcul par rapport à un calcul EF (cf. Tableau 1).

TAB 1 – Résumé des erreurs et des gains sur S1

Simulation	S1DHR	S1SHR
$\varepsilon_{\Omega_H}(p)$	0,00241%	0,00258%
$\varepsilon_{\Omega}(p)$	0,00336%	0,00377%
$\eta$	1,18	1,25

La désynchronisation par matériaux de la représentation des variables internes permet une amélioration des résultats sur la déformation plastique cumulée (cf. Tableau 1). Pour aller plus loin, les erreurs sont d'avantage localisées à l'extérieur du RID de par l'extrapolation des variables internes. Les gains en temps de calcul représentent environ 20% du temps de calcul EF.

## 2.4 Résultats de la simulation S2

Le chargement pendant la simulation S2 correspond à une montée en charge suivie de deux cycles.

### Stratégie sans actualisation

Cette stratégie associée à l'hyper-réduction permet d'obtenir les gains les plus importants.

Comme le nombre de modes empiriques relatifs au champ de déplacement est identique dans les deux cas, les simulations S2DHR et S2SHR sont réalisées dans des conditions comparables car le calcul des variables internes sur le RID à un incrément donné fait intervenir uniquement la base de

modes empiriques relatifs au champ de déplacement.

TAB. 2 – Résumé des erreurs et des gains sur S2 sans actualisation

Simulation	S2DHR	S2SHR	S2DNHR	S2SNHR
$\varepsilon_{Q_H}(p)$	18,1%	23,1%	4,24%	4,12%
$\varepsilon_Q(p)$	18,6%	23,5%		
$\eta$	6,29	6,12	0,980	0,970

Le gain des simulations S2DHR et S2SHR est très important avec plus de 80% du temps de calcul EF. De plus, la tendance s'affirme significativement avec une nette diminution de l'erreur en désynchronisant les variables internes (cf. Figure 3). Enfin, l'erreur est de nouveau d'avantage localisée à l'extérieur du RID en raison de l'extrapolation des variables internes (cf. Tableau 2).

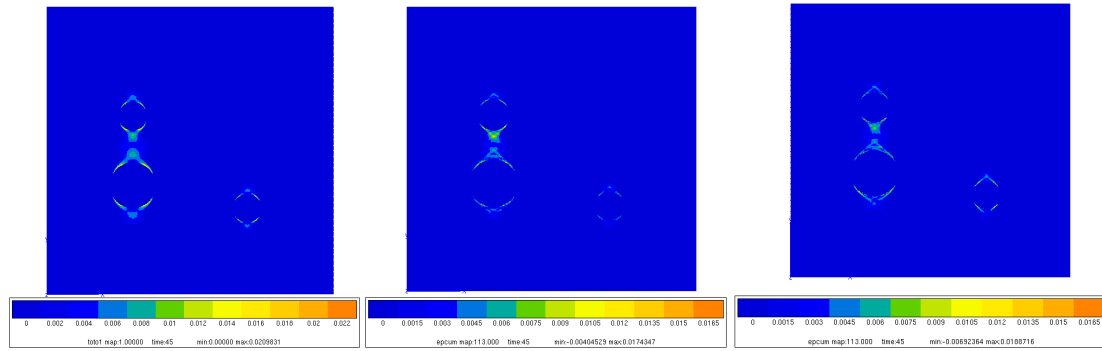


FIG. 3 – Déformation plastique cumulée à la fin de S2, à gauche le cas S2EF, au milieu dans le cas S2DHR, à droite le cas S2SHR (échelles identiques)

L'utilisation de bases réduites pour la représentation des DDL et des variables internes ne suffit pas à apporter un gain en temps de calcul et l'hyper-réduction est nécessaire pour les problèmes avec peu de DDL. Les simulations sans actualisation et sans hyper-réduction traduisent les erreurs dues à l'utilisation d'une base réduite pour décrire le champ de déplacement. L'hyper-réduction apporte également une contribution à l'erreur d'autant plus importante que le RID est petit.

Les améliorations observées en termes de qualité ont deux raisons. Tout d'abord, les modes empiriques sont de meilleure qualité dans le cas désynchronisé. Ensuite, la meilleure estimation des modes empiriques permet de construire un RID qui optimise d'avantage le calcul.

### Stratégie avec actualisation

Cette stratégie associée à une hyper-réduction plus ou moins étendue permet de favoriser le gain en temps de calcul ou bien la précision des prévisions. Quatre calculs ont donc été menés en augmentant le RID avec le paramètre  $n_{el}$  (cf. Tableau 3).

TAB. 3 – Résumé des erreurs et des gains sur S2 avec enrichissement

Simulation	S2DHR1	S2SHR1	S2DHR2	S2SHR2	S2DHR3	S2SHR3	S2DHR4	S2SHR4	S2DNHR	S2SNHR
$\varepsilon_Q(p)$	3,90%	■	3,69%	■	3,22%	4,58%	2,16%	■	0,467%	0,631%
$\eta$	2,97	■	2,23	■	2,15	2,06	1,55	■	0,856	0,839



La désynchronisation des variables internes permet d'améliorer la robustesse de la méthode car tous les calculs synchronisés notés ■ ont échoué en raison de problèmes de convergence.

Les gains représentent entre 35% et 70% du temps de calcul EF alors que dans le même temps, les erreurs sont bien plus faibles que dans un calcul sans actualisation. La Figure 4 met en évidence que la représentation désynchronisée permet d'avantage de gain en temps de calcul pour une erreur donnée obtenue avec la représentation synchronisée. De plus, pour un gain équivalent, la représentation désynchronisée semble fournir les meilleurs résultats. Encore une fois, les représentations S2DNHR et S2SNHR permettent de mesurer la contribution de l'erreur due à l'hyper-réduction, sachant que les bases réduites sont enrichies lors des corrections EF. Elles ne fournissent aucun gain étant donné que l'hyper-réduction est désactivée.

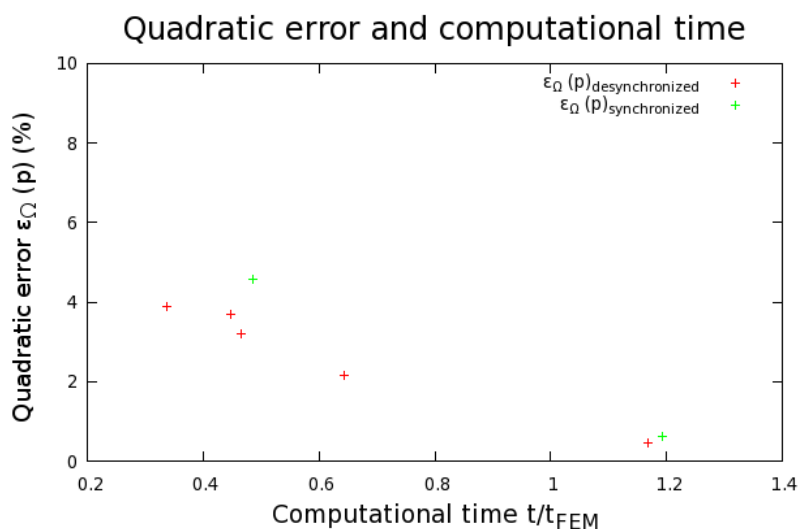


FIG. 4 : Résumé des résultats sur S2 avec actualisation

## Conclusion

La méthode APHR est une méthode de réduction efficace et polyvalente. Elle permet de mener un calcul à qualité contrôlée avec un faible gain en temps de calcul (simulation S1) ou bien optimiser le temps de calcul au détriment d'une qualité moindre (simulation S2). Dans les deux cas, une désynchronisation par matériau de la représentation des variables internes permet de diminuer les erreurs en conservant un gain en temps de calcul meilleur ou équivalent.

## Références

- [1] C.L. Chen, A. Richter, R.C. Thomson. *Mechanical properties of intermetallic phases in multi-component Al-Si alloys using nanoindentation*, Intermetallics, Elsevier, 17 634-641, 2009.
- [2] J.C. Michel, P. Suquet. *Nonuniform transformation field analysis*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 40 6937-6955, 2003.
- [3] J.C. Michel, P. Suquet. *Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Elsevier, 193 5477-5502, 2004.
- [4] D. Ryckelynck, D. Missoum Benziane. *Multi-level a priori hyper reduction of mechanical models involving internal variables*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Elsevier, 199 1134-1142, 2010.
- [5] L. Sirovich. *Turbulence and the dynamics of coherent structures part I: cohenrent structures*, Quart. Appl. Math., 45 561-571, 1987.